

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*  
*Katedra Ekonometrii i Statystyki*

*Witold Orzeszko*

## WYMIAR FRAKTALNY SZEREGÓW CZASOWYCH A RYZYKO INWESTOWANIA\*

**Zarys treści.** W artykule scharakteryzowano wymiar fraktalny jako miarę ryzyka inwestowania w papiery wartościowe. Przedstawiono dwie metody obliczania wymiaru fraktalnego szeregu czasowego – analizę R/S oraz metodę segmentowo-wariacyjną, które następnie zastosowano do indeksów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

**Słowa kluczowe:** wymiar fraktalny, zmienność szeregu czasowego, ryzyko inwestowania, analiza R/S, metoda segmentowo-wariacyjna.

### WSTĘP

W matematyce powstało wiele, często nierównoważnych definicji wymiaru. Najbardziej znanym spośród nich jest wymiar euklidesowy, według którego punkty mają wymiar zero, odcinki – jeden, figury płaskie – dwa, bryły zaś – trzy. Jednak wymiar ten zdaje się niewystarczająco dobrze charakteryzować nieregularne obiekty geometryczne typowe dla świata rzeczywistego. Wraz z rozwojem matematyki stworzono również wiele obiektów teoretycznych, których zawile struktury nie poddają się zbyt prostym regułom opisu geometrii euklidesowej. Powstała w latach siedemdziesiątych XX wieku geometria fraktalna wzięła sobie za cel stworzenie aparatu pojęciowego, który byłby w stanie właściwie opisać te skomplikowane struktury geometryczne. Jednym z podstawowych pojęć tej

---

\* Badanie zostało sfinansowane przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu w ramach grantu UMK nr 397-E.

nowej geometrii jest wymiar fraktalny. Cechą charakterystyczną wymiaru fraktalnego jest możliwość przyjmowania wartości niecałkowitych, odzwierciedlających, w jakim stopniu badane obiekty geometryczne wypełniają przestrzeń, w której są umieszczone.

Wymiar fraktalny można zastosować również do charakteryzacji szeregów czasowych. Za wymiar szeregu czasowego przyjmuje się wymiar krzywej będącej wykresem rozważanego szeregu. Zdefiniowana w ten sposób miara określa stopień poszarpania wykresu, a zatem w sposób naturalny można przyjąć, że im większy jest wymiar szeregu, tym większa jego zmienność. Niesie to praktyczne konsekwencje dla zastosowania wymiaru fraktalnego w analizie ryzyka inwestowania w papiery wartościowe. Papiery, których szeregi cen mają większy wymiar, są bardziej zmienne, a co za tym idzie bardziej ryzykowne.

W niniejszej pracy przedstawiono dwie metody szacowania wymiaru fraktalnego szeregów czasowych: analizę R/S i metodę segmentowo-wariacyjną. Metody te wykorzystano następnie do analizy indeksów i subindeksów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Na podstawie otrzymanych wyników możliwe jest sklasyfikowanie badanych indeksów (sektorów) pod względem ich ryzyka.

## 1. WYMIAR FRAKTALNY

Pojęcie wymiaru należy do najbardziej podstawowych, a zarazem najbardziej kłopotliwych pojęć matematycznych. W ciągu wielu lat rozwoju matematyki powstało wiele odmiennych, często nierównoważnych definicji wymiaru. Poszczególne z nich odwołują się do odrębnego aparatu pojęciowego typowego dla danej dziedziny matematyki. Najbardziej znanym, choćby z kursu matematyki szkolnej, jest wymiar euklidesowy. Jedną z jego własności jest całkowitość; przykładowo punkt ma wymiar równy zero, prosta – jeden, figury płaskie – dwa, bryły zaś – trzy. Jednakże geometria euklidesowa zawodzi przy próbie opisanie wielu tworów natury, takich jak: chmury, drzewa, linie brzegowe, układ krwionośny człowieka i wielu innych. Wymiar euklidesowy nie jest dobrą miarą tego typu obiektów; z jednej strony bowiem nie są to figury płaskie – dwuwymiarowe, z drugiej zaś, ze względu na liczne „dziury” i załamania w strukturze, nie wydają się też bryłami w pełni trójwymiarowymi.

Do opisu takich skomplikowanych strukturalnie obiektów geometrycznych lepiej nadaje się wymiar fraktalny, będący uogólnieniem wymiaru euklidesowego. Mierzy on, w jakim stopniu badany obiekt wypełnia przestrzeń, w której jest zanurzony, a jego cechą charakterystyczną jest możliwość przyjmowania wartości niecałkowitych. Przykładowo drzewo ma wymiar fraktalny z przedziału

(2; 3), a linie brzegowe z zakresu (1; 2). Podobnie, każda krzywa na płaszczyźnie ma wymiar fraktalny z przedziału [1; 2].

W literaturze znane są różne pojęcia wymiaru fraktalnego, m.in. pojemnościowy, samopodobieństwa, Hausdorffa, Bouliganda-Minkowskiego, informacyjny czy korelacyjny. Aby policzyć wymiar pojemnościowy (zwany też wymiarem pudełkowym lub pojemnością Kołmogorowa) danego zbioru  $A \subset R^m$ , należy określić minimalną liczbę  $m$ -wymiarowych domkniętych hipersześcianów o boku długości  $\varepsilon$ , potrzebnych do jego pokrycia. Przechodząc do granicy przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , oblicza się wymiar pojemnościowy zbioru  $A$ :

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Q(A, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (1)$$

gdzie  $Q(A, \varepsilon)$  jest minimalną liczbą hipersześcianów o boku długości  $\varepsilon$ , potrzebnych do pokrycia zbioru  $A$ .

W praktyce podstawową wadą wymiaru pudełkowego jest trudność jego obliczania. Z tego powodu stworzono inne metody, które odwołując się do idei wymiaru pojemnościowego, umożliwiają dokonanie obliczeń w sposób bardziej efektywny.

## 2. WYMIAR FRAKTALNY SZEREGU CZASOWEGO A JEGO ZMIENNOŚĆ

Wymiar fraktalny został stworzony jako pewna miara obiektów geometrycznych. Jednakże w naturalny sposób można poszerzyć zakres jego stosowania również do szeregów czasowych. W tym celu należy nanieść w dwuwymiarowym układzie współrzędnych punkty postaci  $(t, x_t)$ , gdzie  $(x_t)$  jest rozpatrywanym szeregiem czasowym. Nietrudno zauważyć, że granica we wzorze 1 dla dowolnego skończonego zbioru punktów jest równa zero, stąd i jego wymiar fraktalny jest zerowy. Dlatego procedurę kontynuuje się, łącząc odcinkami kolejne punkty. W rezultacie otrzymuje się łamaną (ozn.  $\Gamma$ ) o wierzchołkach postaci  $(t, x_t)$ . Przez wymiar fraktalny szeregu czasowego rozumie się wymiar fraktalny łamanej  $\Gamma$ .

Należy w tym momencie zastanowić się, czy przedstawiona powyżej procedura obliczeniowa może być uznana za poprawną definicję wymiaru szeregu czasowego, tzn. czy prowadzi do jego jednoznacznej charakteryzacji. Widać bowiem, że kształt konstruowanej łamanej jawnie zależy od przyjętej jednostki czasu oraz jednostki samego szeregu. Jednakże korzystając wprost z definicji wymiaru pojemnościowego, nietrudno udowodnić, iż wymiar fraktalny łamanej nie zmienia się po jej „przeskalowaniu”, czyli powinowactwie prostokątnym o osi OX oraz OY.

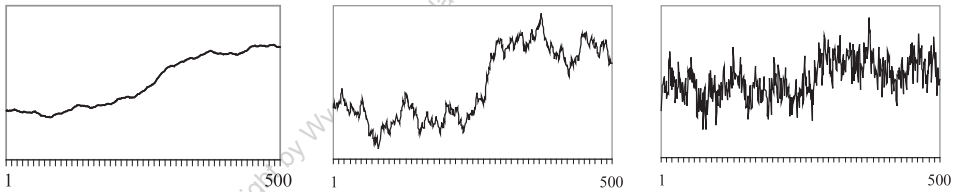
Drugą nasuwającą się uwagę jest widoczna zależność wymiaru fraktalnego szeregu czasowego od jego długości. Dodając do badanego szeregu kolejne obserwacje, zwiększamy długość łamanej, a tym samym zwiększamy wartość licznika we wzorze 1. Wynika stąd, że wymiar fraktalny uzupełnionego szeregu jest nie mniejszy od wymiaru szeregu wyjściowego. Zasadne jest zatem, aby oznaczać wymiar szeregu jako wartość zależną od liczby obserwacji, tzn.  $D(N)$ .

Nietrudno zauważyć związek między zmiennością szeregu a jego wymiarem fraktalnym. Szeregi cechujące się większą zmiennością mają bardziej postrzępione wykresy, a co za tym idzie większy wymiar. Zależność tę wyraźnie ilustruje rysunek 1. Przedstawione zostały na nim wykresy funkcji Weierstrassa-Mandelbrota, zadanej wzorem:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b^{-iH} (1 - \cos b^i x), \quad (2)$$

gdzie  $b$  i  $H$  są parametrami spełniającymi warunki  $b > 1$  oraz  $0 < H < 1$ .

Udowodniono, że wykresy funkcji Weierstrassa-Mandelbrota są fraktalami, a teoretycznie wyliczony ich wymiar fraktalny wynosi  $D = 2 - H$  (por. Dubuc i in., 1989). Po przyjęciu  $b = 2,1$  oraz, kolejno,  $H = 0,1; 0,5; 0,9$  wygenerowano trzy szeregi składające się z 500 realizacji, wypełniających równomiernie przedział  $[10; 10,1]$ .



Rysunek 1. Funkcja Weierstrassa-Mandelbrota kolejno dla  $D = 1,1$ ;  $D = 1,5$ ;  $D = 1,9$

Źródło: opracowanie własne.

Przez ryzyko w inwestowaniu rozumie się możliwość wystąpienia efektu niezgodnego z oczekiwaniami albo w węższym znaczeniu – możliwość poniesienia strat (Jajuga, Jajuga, 2006). W przypadku rynku akcji ryzyko papieru wartościowego często utożsamia się ze zmiennością szeregu jego cen lub stóp zwrotu. Najpopularniejszą miarą zmienności jest odchylenie standardowe (wariancja). Za akcje bardziej ryzykowne uważa się te o większym odchyleniu standardowym szeregu stóp zwrotu. Przedstawione powyżej rozumowanie uzasadnia stosowanie wymiaru fraktalnego jako alternatywnej miary zmienności, a więc i ryzyka inwestowania w papiery wartościowe. Warto podkreślić, że mimo iż odchylenie standardowe, jak i wymiar fraktalny są ilościowymi charakterystykami zmienności szeregu, to jednak odnoszą się one do nieco innych aspektów tej zmienności.

### 3. METODY SZACOWANIA WYMIARU FRAKTALNEGO SZEREGU CZASOWEGO

W niniejszej pracy przedstawione zostały dwie metody wyznaczania wymiaru fraktalnego szeregu czasowego: analiza R/S oraz metoda segmentowo-wariacyjna.

Analiza przeskalowanego zakresu, zwana w skrócie analizą R/S, powstała w celu badania efektu długiej pamięci, a więc w szczególności służy do identyfikacji zachowania nielosowego w szeregach czasowych. Jednakże na podstawie wykładnika Hursta, który jest głównym wynikiem analizy R/S, możliwe jest również obliczenie wymiaru fraktalnego szeregu czasowego.

Algorytm obliczania tzw. przeskalowanego zakresu w analizie R/S przebiega według następujących etapów (Peters, 1994):

1. przekształcenie zadanego szeregu  $(x_t)$  (gdzie  $t = 1, 2, \dots, n$ ) w nowy szereg – jego logarymicznych stóp zwrotu, wg wzoru  $y_t = \ln x_{t+1} - \ln x_t$ ,
2. obliczenie wartości średniej  $M^{(n)}$  i odchylenia standardowego  $S^{(n)}$ :

$$M^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, \quad S^{(n)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - M^{(n)})^2},$$

3. wyznaczenie szeregu  $Y_k^{(n)} = \sum_{t=1}^k (y_t - M^{(n)})$ , dla  $k = 1, 2, \dots, n$ ,
4. obliczenie rozstępu  $R^{(n)} = \max_k (Y_k^{(n)}) - \min_k (Y_k^{(n)})$ ,
5. obliczenie przeskalowanego zakresu  $R/S_n$ , według formuły

$$R/S_n \stackrel{df}{=} \frac{R^{(n)}}{S^{(n)}}.$$

W celu wyznaczenia wykładnika Hursta szereg obserwacji zawierający  $N$  elementów dzieli się na podciągi długości  $n$ , gdzie  $n$  jest kolejnym dzielnikiem liczby  $N$ , spełniającym warunek  $2 \leq n \leq N/2^1$ . Przy ustalonym  $n$ , dla każdego wyodrębnionego  $i$ -tego podciągu oblicza się wartość  $R/S_n^{(i)}$ , postępując według kroków 1–5. Następnie wyznacza się średnią arytmetyczną  $R/S_n$ , przyjmując ją za szukaną wartość  $R/S_n$  dla rozważanego  $n$ . Stosując tę procedurę dla kolejnych  $n$ , otrzymuje się ciąg wartości  $(R/S_n)$ , podstawą zaś analizy R/S jest ich potęgowa zależność od liczby  $n$ :

$$R/S_n = a \cdot n^{h(N)} \quad (3)$$

<sup>1</sup> W praktyce zwykle przyjmuje się jako ograniczenie dolne liczbę większą niż 2. W przeprowadzonych badaniach uwzględniono wartości  $10 \leq n \leq N/2$ .

lub równoważnie:

$$\ln(R/S_n) = h(N) \ln n + \ln a, \quad (4)$$

gdzie  $a$  jest stałą. Drugą stałą – liczbę  $h(N)$  nazywa się wykładnikiem Hursta i wyznacza się jako współczynnik regresji zmiennych  $\ln(R/S_n)$  i  $\ln n$ .

Przy użyciu wykładnika Hursta oblicza się wymiar fraktalny szeregu czasowego, korzystając z zależności (Zwolankowska, 2000):

$$D(N) = 2 - h(N). \quad (5)$$

Alternatywnym sposobem szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda segmentowo-wariacyjna S-W (Zwolankowska, 2000). Na mocy wzoru 1 wymiar fraktalny szeregu czasowego ( $x_t$ ) dla  $t = 1, 2, \dots, N$  można wyznaczyć jako granicę:

$$D(N) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Q(\Gamma, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon^{-1})}, \quad (6)$$

gdzie  $Q(\Gamma, \varepsilon)$  jest minimalną liczbą kwadratów o boku  $\varepsilon$  pokrywających łamaną  $\Gamma$ . Niech  $S(\Gamma, \varepsilon)$  będzie polem rozważanego pokrycia. Wówczas  $S(\Gamma, \varepsilon) = Q(\Gamma, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$ , a wzór 6 można przekształcić w sposób równoważny do postaci:

$$D(N) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{S(\Gamma, \varepsilon)}{\varepsilon^2}}{\ln(\varepsilon^{-1})}. \quad (7)$$

Można zatem przyjąć, że dla dostatecznie małych wartości  $\varepsilon$  prawdziwa jest zależność:

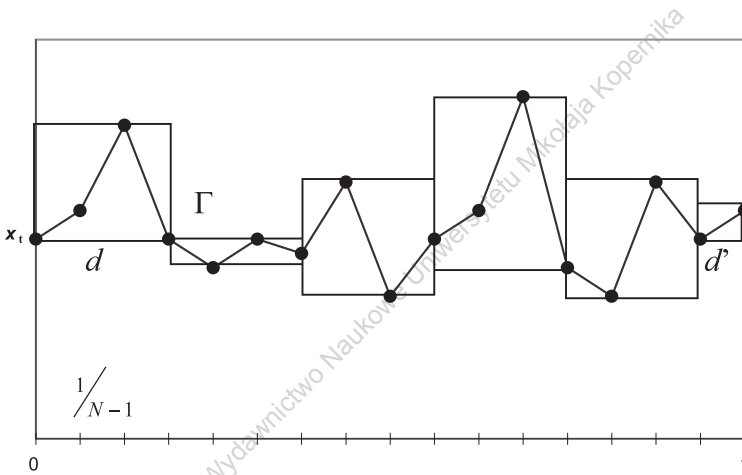
$$D(N) \approx \frac{\ln \frac{S(\Gamma, \varepsilon)}{\varepsilon^2}}{\ln(\varepsilon^{-1})}. \quad (8)$$

Metoda segmentowo-wariacyjna stanowi praktyczną adaptację wzoru 8. Punktem wyjścia metody jest narysowanie w dwuwymiarowym układzie odpowiednio przeskalowanej łamanej  $\Gamma$  tak, aby jej oba krańce miały współrzędne o odciętej równej, odpowiednio, 0 i 1. W tym celu należy nanieść punkty postaci  $\left(\frac{t-1}{N-1}, x_t\right)$ , dla  $t = 1, 2, \dots, N$ , a następnie kolejno połączyć je odcinkami. Widać, że pierwsze współrzędne naniesionych punktów są równo oddalone od siebie o  $\frac{1}{N-1}$ , a  $x_1$  i  $x_N$  odpowiadają, odpowiednio, lewemu i prawemu krańcowi

przedziału  $[0; 1]$ . Następnie łamaną  $\Gamma$  pokrywamy prostokątami rozpiętymi nad  $m$  (gdzie  $m$  jest ustaloną liczbą naturalną nie mniejszą niż 2) kolejnymi punktami węzłowymi jak na rysunku 2.

Otrzymuje się w ten sposób  $n = \left\lfloor \frac{N-1}{m-1} \right\rfloor$  prostokątów o rozłącznych wnętrzach, każdy o podstawie długości  $d = \frac{m-1}{N-1}$ . Dla ustalonego  $m$  oraz kolejnego

$j = 1, 2, \dots, N$  powstałe prostokąty oznaczmy przez  $P_j(m) = [a_j; b_j] \times [a'_j; b'_j]$ . Wówczas z samej konstrukcji widać, że  $a_j = (j-1) \cdot d$ ,  $b_j = j \cdot d$ ,  $a'_j = \min\{f(x); x \in [a_j; b_j]\}$  i  $b'_j = \max\{f(x); x \in [a_j; b_j]\}$ .



Rysunek 2. Tworzenie zbioru  $\Gamma$  w metodzie segmentowo-wariacyjnej dla  $m = 4$

Źródło: opracowanie własne.

W sytuacji, gdy iloraz  $\frac{N-1}{m-1}$  nie jest liczbą całkowitą, po zakończeniu opisanej procedury pozostaje niepokrytych  $N - (m-1) \cdot n - 1$  ostatnich punktów węzłowych łamanej  $\Gamma$ .

Punkty te pokrywa się dodatkowym prostokątem  $P'(m) = [b_n; 1] \times [a'; b']$ , gdzie  $a' = \min\{f(x); x \in [b_n; 1]\}$  i  $b' = \max\{f(x); x \in [b_n; 1]\}$ , którego podstawa ma długość  $d' = \frac{N - (m-1) \cdot n - 1}{N-1}$ . Ponieważ pole takiego pokrycia zbioru  $\Gamma$  jest równe  $S(\Gamma, d) = \sum_{j=1}^n d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')$ , więc w konsekwencji, po prostych

<sup>2</sup> Symbol  $[\cdot]$  oznacza część całkowitą liczby.

przekształceniach wzoru 8, otrzymuje się, iż:

$$D(N) \cdot \ln \frac{1}{d} \approx \ln \frac{\sum_{j=1}^n d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}. \quad (9)$$

Oznacza to, że oszacowaniem wymiaru fraktalnego zbioru  $\Gamma$  jest współczynnik

regresji zmiennych  $\ln \frac{1}{d}$  i  $\ln \frac{\sum_{j=1}^n d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}$ .

W praktyce algorytm szacowania wymiaru fraktalnego metodą segmentowo-wariacyjną wygląda następująco:

Najpierw przyjmuje się  $m = 2$ , skąd  $d_1 = \frac{1}{N-1}$ . Następnie, w kolejnych iteracjach, zwiększa się  $m$  o stałą wartość 2, otrzymując  $d_2 = \frac{3}{N-1}$ ,  $d_3 = \frac{5}{N-1}$ , ..., kontynuując procedurę tak długo, aż pokryje się cały szereg dwoma prostokątami.

Dla otrzymanego zbioru punktów postaci  $\left( \ln \frac{1}{d_i}, \ln \frac{S(d_i)}{d_i^2} \right)$  dokonuje się wspomnianej powyżej regresji. Wyznaczony współczynnik regresji oznaczmy przez  $D_1$ .

Następnie przyjmuje się  $m = 3$ , skąd  $d_1 = \frac{2}{N-1}$ . Zwiększając w kolejnych iteracjach wartość  $m$  o 3, otrzymuje się kolejny zbiór punktów. Obliczony dla tych punktów współczynnik regresji oznaczmy przez  $D_2$ .

Analogicznie postępując dla  $m = 5$  i  $m = 7$ , otrzymuje się w sumie cztery wartości:  $D_1, D_2, D_3, D_4$ .

Ostatecznie poszukiwany wymiar fraktalny  $D(N)$  oblicza się, korzystając z następującej procedury wyboru:

1. oblicza się  $\bar{D} = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}{4}$ ,
2. jeśli:
  - $\bar{D} = 1,5$ , to  $D(N) := 1,5$ ,
  - $\bar{D} > 1,5$ , to  $D(N) := \max(D_i)$ ,
  - $\bar{D} < 1,5$ , to  $D(N) := \min(D_i)$ .

W celu zweryfikowania obu zaprezentowanych algorytmów przeprowadzono symulacje, w których badaniu poddano szeregi wygenerowane z funkcji Weierstrassa-Mandelbrota (wzór 2) z teoretycznymi wymiarami fraktalnymi równymi kolejno 1,1; 1,5 i 1,9. Dla każdego wymiaru rozważono szeregi złożone z 500, 1000 oraz 2000 obserwacji. Otrzymane rezultaty zaprezentowano w tabeli 1.



Tabela 1. Oszacowane wymiary fraktalne szeregów wygenerowanych z funkcji Weierstrassa-Mandelbrota

	S-W			R/S		
	500	1000	2000	500	1000	2000
W-M 1,1	1,130	1,132	1,135	1,161	1,161	1,159
W-M 1,5	1,455	1,471	1,485	1,434	1,448	1,459
W-M 1,9	1,757	1,743	1,798	1,716	1,720	1,735

Źródło: obliczenia własne.

Jak widać, obie metody dały zbliżone rezultaty, choć metoda segmentowo-wariacyjna okazała się nieco dokładniejsza. W przypadku funkcji Weierstrassa-Mandelbrota z wymiarami 1,1 oraz 1,5 błąd oszacowania był w obu metodach nie większy niż 0,066, natomiast w przypadku wymiaru 1,9 – osiągnął maksymalny poziom 0,184. Badania empiryczne pokazują, że wśród danych rzeczywistych dominują szeregi persystentne, tzn. o wymiarach mniejszych niż 1,5 (por. np. Peters, 1997), stąd istotnym wnioskiem wynikającym z przeprowadzonych symulacji jest potwierdzenie dokładności zastosowanych metod właśnie dla wymiarów 1,1 oraz 1,5.

Warto również podkreślić, że otrzymane niedokładności nie wynikają tylko z ewentualnych niedoskonałości stosowanych metod, lecz są efektem zastosowania ich do szeregów o skończonej długości. Można bowiem udowodnić, że dopiero dla odpowiednio dużych  $N$  wartości  $D(N)$  będą zbliżały się do poziomów teoretycznych (por. np. Purczyński, 2000). Własność ta jest wyraźnie widoczna w tabeli 1 dla wyników otrzymanych metodą R/S: wraz ze wzrostem długości szeregu maleje błąd oszacowania.

#### 4. ANALIZA RYZYKA INWESTOWANIA NA GPW W WARSZAWIE

Badaniu poddano dziewięć indeksów i subindeksów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie: WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80, WIG-Banki, WIG-Budow, WIG-Info, WIG-Spozy, WIG-Telkom<sup>3</sup>. Dla 2070 kursów zamknięcia z okresu 2.01.2001–3.04.2009 wyznaczono wymiary fraktalne indeksów, wykorzystując metodę segmentowo-wariacyjną oraz analizę R/S. Otrzymane wartości podsumowano w tabeli 2, gdzie dla porównania zawarto również informację o odchyleniu standardowym stóp zmian analizowanych indeksów.

<sup>3</sup> W celu zagwarantowania porównywalności wyników w badaniu uwzględniono szeregi czasowe tylko tych indeksów, które składają się z tej samej liczby obserwacji, tzn. były notowane przez cały analizowany okres.

Tabela 2. Wymiary fraktalne oraz odchylenia standardowe indeksów giełdowych

Indeks	S-W	R/S	$\sigma$
WIG	1,358	1,394	0,0136
WIG20	1,436	1,429	0,0165
mWIG40	1,309	1,324	0,0112
sWIG80	1,284	1,277	0,0118
WIG-Banki	1,400	1,434	0,0173
WIG-Budow	1,319	1,336	0,0147
WIG-Info	1,451	1,392	0,0179
WIG-Spozy	1,322	1,344	0,0125
WIG-Telkom	1,395	1,480	0,0198

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 3 przedstawiono ranking indeksów, uporządkowanych według wartości wyznaczonych miar ryzyka.

Tabela 3. Indeksy giełdowe uporządkowane według wyznaczonych miar ryzyka

Indeks	S-W	Indeks	R/S	Indeks	$\sigma$
sWIG80	1,284	sWIG80	1,277	mWIG40	0,0112
mWIG40	1,309	mWIG40	1,324	sWIG80	0,0118
WIG-Budow	1,319	WIG-Budow	1,336	WIG-Spozy	0,0125
WIG-Spozy	1,322	WIG-Spozy	1,344	WIG	0,0136
WIG	1,358	WIG-Info	1,392	WIG-Budow	0,0147
WIG-Telkom	1,395	WIG	1,394	WIG20	0,0165
WIG-Banki	1,400	WIG20	1,429	WIG-Banki	0,0173
WIG20	1,436	WIG-Banki	1,434	WIG-Info	0,0179
WIG-Info	1,451	WIG-Telkom	1,480	WIG-Telkom	0,0198

Źródło: obliczenia własne.

Z otrzymanych rezultatów badań wynika, że za wyjątkiem indeksów WIG-Info i WIG-Telkom obie zastosowane metody szacowania wymiaru fraktalnego dały bardzo zbliżone wartości (por. tabela 2), a w konsekwencji doprowadziły do podobnego rankingu (por. tabela 3). Rankingi te nieco różnią się od zestawienia dokonanego na podstawie odchylenia standardowego, jednak różnica ta nie wydaje się bardzo istotna.

Zarówno z analizy wymiaru fraktalnego, jak i odchylenia standardowego wynika, że najmniejszym ryzykiem w analizowanym okresie charakteryzowały się sektory małych i średnich spółek, wchodzących w skład indeksów sWIG80 oraz mWIG40, a największym – sektory spółek teleinformatycznych.

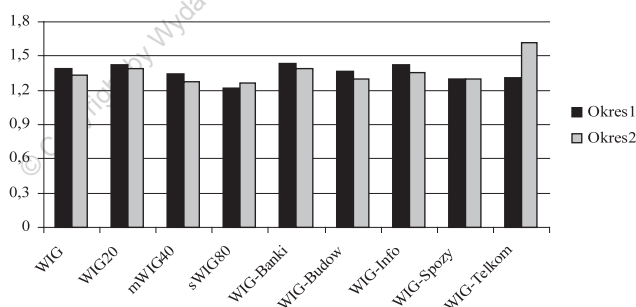
W kolejnym etapie badania analizowany okres podzielono na dwa podokresy: 2.01.2001–11.02.2005 („Okres 1”) oraz 14.02.2005–3.04.2009 („Okres 2”) i dokonano pomiaru zmienności indeksów w obu próbach<sup>4</sup>. Celem badania było zweryfikowanie wpływu kryzysu finansowego z lat 2007–2009 na poziom ryzyka inwestowania na GPW w Warszawie<sup>5</sup>.

W tabeli 4 oraz na rysunkach 3–5 przedstawiono odchylenia standardowe, a także wymiary fraktalne indeksów obliczone metodą segmentowo-wariacyjną oraz analizą R/S dla obu podokresów.

Tabela 4. Wymiary fraktalne oraz odchylenia standardowe indeksów giełdowych w podokresach 2.01.2001–11.02.2005 oraz 14.02.2005–3.04.2009

Indeks	S-W		R/S		$\sigma$	
WIG	1,387	1,335	1,403	1,446	0,0118	0,0152
WIG20	1,421	1,393	1,433	1,493	0,0149	0,0180
mWIG40	1,346	1,271	1,315	1,364	0,0080	0,0136
sWIG80	1,224	1,270	1,303	1,324	0,0097	0,0135
WIG-Banki	1,435	1,390	1,395	1,488	0,0126	0,0209
WIG-Budow	1,369	1,303	1,324	1,374	0,0119	0,0170
WIG-Info	1,422	1,353	1,407	1,406	0,0205	0,0148
WIG-Spozy	1,295	1,297	1,318	1,375	0,0103	0,0143
WIG-Telkom	1,314	1,614	1,452	1,540	0,0214	0,0180

Źródło: obliczenia własne.

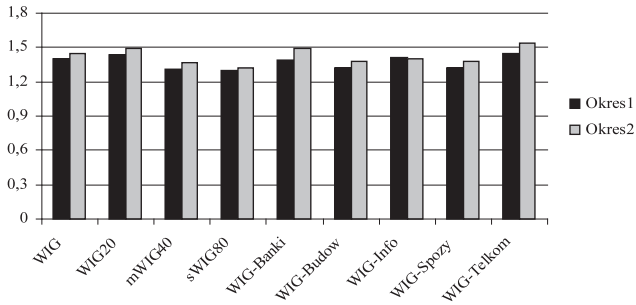


Rysunek 3. Wymiary fraktalne indeksów obliczone metodą segmentowo-wariacyjną

Źródło: obliczenia własne.

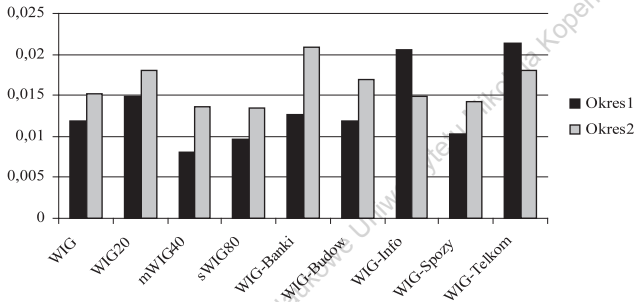
<sup>4</sup> Należy zauważyć, że porównanie wymiarów możliwe jest wyłącznie wtedy, gdy próbki składają się z tej samej liczby obserwacji.

<sup>5</sup> Druga próba wykracza nieco poza okres kryzysu, jednak zbyt mała liczba obserwacji w próbie nie jest zjawiskiem pożądanym w procesie wyznaczania wymiaru fraktalnego. Poza tym zakres czasowy kryzysu z natury i tak przyjmowany jest umownie.



Rysunek 4. Wymiary fraktalne indeksów obliczone za pomocą analizy R/S

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 5. Odchylenia standardowe stóp zmian indeksów

Źródło: obliczenia własne.

Wnioski płynące z otrzymanych wyników są zgodne z oczekiwaniami dla odchylenia standardowego oraz wymiaru fraktalnego otrzymanego przy wykorzystaniu analizy R/S. Generalnie potwierdzają one wzrost ryzyka inwestowania na GPW w Warszawie w „Okresie 2”. Jedynie spółki wchodzące w skład indeksu WIG-Info (obie metody) oraz WIG-Telkom (odchylenie standardowe) cechują się w tym czasie spadkiem poziomu ryzyka. Zaskakujące są wyniki otrzymane z zastosowaniem metody segmentowo-wariacyjnej. W tym wypadku jedynie dla indeksów sWIG80, WIG-Spozy oraz WIG-Telkom zaobserwowano wzrost ryzyka.

W tabelach 5 oraz 6 przedstawiono ranking indeksów, uporządkowanych według wartości wyznaczonych miar ryzyka w obu analizowanych podokresach. Jak widać, jedyna istotna różnica pomiędzy rankingami to pozycja indeksu spółek sektora telekomunikacyjnego w pierwszym okresie: według metody S-W indeks ten jest jednym z mniej ryzykownych, podczas gdy pozostałe metody jednoznacznie klasyfikują go jako najbardziej ryzykowny.

Tabela 5. Indeksy giełdowe uporządkowane według miar ryzyka – „Okres 1”

Indeks	S-W	Indeks	R/S	Indeks	$\sigma$
sWIG80	1,224	sWIG80	1,303	mWIG40	0,0080
WIG-Spozy	1,295	mWIG40	1,315	sWIG80	0,0097
WIG-Telkom	1,314	WIG-Spozy	1,318	WIG-Spozy	0,0103
mWIG40	1,346	WIG-Budow	1,324	WIG	0,0118
WIG-Budow	1,369	WIG-Banki	1,395	WIG-Budow	0,0119
WIG	1,387	WIG	1,403	WIG-Banki	0,0126
WIG20	1,421	WIG-Info	1,407	WIG20	0,0149
WIG-Info	1,422	WIG20	1,433	WIG-Info	0,0205
WIG-Banki	1,435	WIG-Telkom	1,452	WIG-Telkom	0,0214

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6. Indeksy giełdowe uporządkowane według miar ryzyka – „Okres 2”

Indeks	S-W	Indeks	R/S	Indeks	$\sigma$
sWIG80	1,270	sWIG80	1,324	sWIG80	0,0135
mWIG40	1,271	mWIG40	1,364	mWIG40	0,0136
WIG-Spozy	1,297	WIG-Budow	1,374	WIG-Spozy	0,0143
WIG-Budow	1,303	WIG-Spozy	1,375	WIG-Info	0,0148
WIG	1,335	WIG-Info	1,406	WIG	0,0152
WIG-Info	1,353	WIG	1,446	WIG-Budow	0,0170
WIG-Banki	1,390	WIG-Banki	1,488	WIG20	0,0180
WIG20	1,393	WIG20	1,493	WIG-Telkom	0,0180
WIG-Telkom	1,614	WIG-Telkom	1,540	WIG-Banki	0,0209

Źródło: obliczenia własne.

Generalnie otrzymane rezultaty wskazują na indeksy sWIG80 i mWIG40 jako na najmniej ryzykowne oraz na WIG-Telkom, WIG-Banki oraz WIG20 jako na najbardziej ryzykowne w obu analizowanych okresach. Należy jednak podkreślić, że zmiana pozycji w rankingach indeksów banków oraz firm telekomunikacyjnych wygląda odmiennie według poszczególnych metod. Według metody S-W największy wzrost ryzyka w „Okresie 2” zanotował sektor WIG-Telkom, natomiast według metody R/S oraz odchylenia standardowego – indeks WIG-Banki.

## LITERATURA

- Dubuc B., Quiniou J. F., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S. W. (1989), *Evaluating the fractal dimension of profiles*, „Physical Review A”, 39, 3.
- Jajuga K., Jajuga T. (2006), *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Orzeszko W. (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, seria: „Nowe Trendy w Naukach Ekonomicznych”, Fundacja Promocji i Akredytacji Kierunków Ekonomicznych, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. (1997), *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Peters E. E. (1994), *Fractal Market Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Peters E. E. (1997), *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa.
- Purczyński J. (1999), *Przybliżona metoda wyznaczania wartości wykładnika Hursta*, referat wygłoszony na konferencji „Mikroekonometria w teorii i praktyce”, Szczecin.
- Purczyński J. (2000), *Chaos a analiza R/S*, [w:] Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Szczecin.
- Tempczyk M. (1995), *Świat harmonii i chaosu*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.
- Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego, Katowice.
- Zwolankowska M. (1999a), *Szacowanie lokalnego wymiaru fraktalnego szeregów czasowych*, „Zeszyty Naukowe”, nr 233; „Metody ilościowe w ekonomii: Rynek kapitałowy. Rynek nieruchomości”, Szczecin.
- Zwolankowska M. (1999b), *Wykorzystanie wymiaru fraktalnego w ocenie ryzyka inwestycji giełdowych*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '99*, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego, Katowice.
- Zwolankowska M. (2000), *Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego*, „Przegląd Statystyczny”, R. 47, z. 1–2.

## FRACTAL DIMENSION OF TIME SERIES AS A MEASURE OF INVESTMENT RISK

**A b s t r a c t.** A concept of fractal dimension as a measure of risk in securities trading is presented in this paper. The two methods of calculating fractal dimension of time series – R/S analysis and segment-variation method are described and applied to indices of the Warsaw Stock Exchange.

**Key words:** fractal dimension, variability of time series, investment risk, R/S analysis, segment-variation method.